مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هشتم، شماره سوم (پیاپی ۳۰)، پاییز ۹۰، ص ص ۲۵-۱۹
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

حل معادله انتگرال با استفاده از روش گرادیان مزدوج و مقایسه با روش‌های تصویری

طاهر لطفی*[1]، کتایون مهدیانی[2]
۱و۲- گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، همدان

چکیده
در این مقاله حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته‌های متقارن توسط روش گرادیان مزدوج مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین این روش در این حالت خاص با روش‌های تصویری معروف مانند گلرکین و کالوکیشن مقایسه خواهد شد. در پایان سادگی و کارایی در عمل نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی: معادله انتگرال، هسته متقارن، روش گرادیان مزدوج، روش‌های تصویری.

۱ مقدمه

امروزه، بیش از ۶۰ سال از ارایه الگوریتم گرادیان مزدوج می‌گذرد و کاربرد آن برای حل انواع مسایل بهینه‌سازی جایگاهی خاص دارد. از نظر تاریخی اولین بار، این الگوریتم برای حل دستگاه‌های معادلات خطی مورد استفاده قرار گرفت. این الگوریتم توسط هستنس و اشتیفل در سال ۱۹۵۲ اختراع گردید. اما، در سال ۱۹۶۴ فلچر و ریوز آن را در حل مسال بهینه سازی وارد کردند [۱].
سوالی که در این جا مطرح است این است که آیا این الگوریتم می‌تواند برای حل معادلات دیفرانسیل یا انتگرال به کار گرفته شود یا خیر؟ در ادامه خواهیم دید، می‌توان معادلات انتگرال فردهم نوع دوم با هسته‌های متقارن را توسط این الگوریتم حل نمود. حال سؤال دیگر آن است که این الگوریتم چه مزیتی بر روش‌های تصویری کلاسیک نظیر گلرکین یا کالوکیشن دارد؟ پاسخ به این پرسش، تنها زمانی قابل توجه است که، معادله داده شده دارای هسته متقارن باشد. گرچه امروز تعمیم‌هایی از این الگوریتم وجود دارد، با این حال در این حالت خاص این الگوریتم فوق‌العاده کارآمد بوده و در حال حاضر یکی از بهترین روش‌های موجود می‌باشد [۱]. ساختار کلی این مقاله بدین صورت است که ابتدا یک مرور کلی بر روش‌های تصویری خواهیم داشت و دو حالت خاص و مهم آن را که در عمل بیشتر مورد استفاده واقع می‌شوند، ارایه خواهیم داد. همچنین الگوریتم گرادیان مزدوج را

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی : lotfitaher@yahoo.com

برای حل معادله انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته متقارن ارایه می‌دهیم. با مثالی شیوه محاسبات با این روش‌ها را روشن می‌سازیم، که برای مقایسه با روش گرادیان مزدوج بسیار مفید خواهد بود.

۲ روش‌های تصویری

برای حل تقریبی معادله انتگرال

$$\lambda x(t)-\int_D K(t,s)x(s)ds=y(t), \qquad t\in \mathrm{D} \tag{۱}$$

یک خانواده با بعد متناهی از توابع را انتخاب می‌کنیم و $\tilde{x}(s)$ بسط آن‌ها را به عنوان تقریبی از جواب $x(s)$ به دست می‌آوریم. این جواب باید به طور تقریبی در معادله (۱) صدق کند. راه‌های مختلفی وجود دارد که $\tilde{x}(s)$ می‌تواند به عنوان تقریبی از جواب برآورد شود، که این راه‌ها منجر به روش‌های متفاوتی می‌شوند، از قبیل روش کالوکیشن و گلرکین. هنگامی که این روش‌ها با استفاده از آنالیز تابعی در یک شکل خلاصه فرمول‌بندی می‌شوند، استفاده از عملگرهای تصویری ضروری است. از این روش‌ها اغلب با نام روش‌های تصویری یاد می‌شود [۱، ۲ و ۳].

۲-۱ نظریه کلی

معادله انتگرال (۱) را در حالت عملگری به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\lambda-K)x=y \tag{۲}$$

و فرض می‌شود که عملگر K، از فضای باناخ X به X فشرده باشد. در عمل یک دنباله از زیر فضای با بعد متناهی $X_n\subset X$ را که $n\geq ۱$ و بعد X_n، d_n می‌باشد انتخاب می‌کنیم. X_n پایه‌ای به صورت $\{\varphi_۱,\ldots,\varphi_d\}$ با $d_n=d$ دارد. ما به دنبال تابع $x_n\in X_n$ هستیم که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$x_n(t)=\sum_{j=۱}^{d} c_j\varphi_j(t), \quad t\in \mathrm{D} \tag{۳}$$

لذا لازم است که ضرایب $\{c_۱,\ldots,c_d\}$ تعیین شوند. با توجه به تقریبی بودن این جواب، می‌توان شکل باقیمانده در تقریب را هنگامی که $x\approx x_n$، به صورت زیر معرفی نمود:

$$\begin{aligned} r_n(t) &= \lambda x_n(t)-\int_D K(t,s)x_n(s)ds-y(t) \\ &=\sum_{j=۱}^{d} c_j\left\{\lambda\varphi_j(t)-\int_D K(t,s)\varphi_j(s)\,ds\right\}-y(t), \qquad t\in D. \end{aligned} \tag{۴}$$

یا به طور نمادین:

$$r_n = (\lambda - K)x_n - y .$$

ضرایب $\{c_1,...,c_d\}$ با این انتظار که x_n جواب تقریبی خوبی برای x باشد و لذا باقیمانده تقریباً باید صفر باشد به دست خواهند آمد.

۲-۱-۱ روش کالوکیشن

مبنای روش کالوکیشن انتخاب نقاط مجزای $t_1,...,\ t_d \in D$ می‌باشد به طوری که

$$r_n(t_i) = 0, \qquad i = 1,...,d_n \tag{۵}$$

و لذا این منجر می‌شود به تعیین ضرایب $\{c_1,...,c_d\}$، که با حل دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آید

$$\sum_{j=1}^{d} c_j \left\{\lambda\varphi_j(t_i) - \int_D K(t_i,s)\varphi_j(s)ds\right\} = y(t_i), \qquad i = 1,...,d_n. \tag{۶}$$

۲-۱-۲ روش گلرکین

با فرض اینکه X یک فضای هیلبرت و $(\cdot,\cdot)$ نماد ضرب داخلی روی X باشد، و با در نظر گرفتن $\varphi=\{\varphi_1,...,\varphi_d\}$ به عنوان خانواده‌ای از توابع مستقل خطی متعامد، لازم است که r_n در شرط زیر صدق کند:

$$(r_n,\varphi_i) = 0 \ , \ \mathrm{i} = 1,...,d_n. \tag{۷}$$

با به کار بردن (۴) و (۷) برای یافتن x_n دستگاه خطی زیر حاصل می‌گردد.

$$\sum_{j=1}^{d} c_j \left\{\lambda(\varphi_j,\varphi_i) - (K\varphi_j,\varphi_i)\right\} = (y,\varphi_i) \ , \quad i = 1,...,d_n. \tag{۸}$$

۳ روش گرادیان مزدوج

همان طور که در بخش مقدمه گفته شد، این روش برای حل دستگاه $Ax = y$ در صورتی‌که A یک ماتریس متقارن معین مثبت باشد، اولین بار توسط هستنس و اشتیفل مورد استفاده قرار گرفت [۷-۴]. در این روش حدس اولیه x_0 برای جواب $x^* = A^{-1}y$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای حل معادله انتگرال

$$x(t) - \int_D K(t,s)x(s)\ ds = y(t) \qquad \mathrm{t} \in \mathrm{D}.$$

و هسته متقارن، یعنی

$$K(t,s)=K(s,t) \quad t,s\in D.$$

که $A=I-K$ و A یک عملگر معین مثبت است. دستگاه $Ax=y$ را با استفاده از روش گرادیان مزدوج حل می‌کنیم. ساختار الگوریتم این روش به صورت زیر می‌باشد:
با استفاده از حدس اولیه x_0 می‌توان نوشت

$$r_0=y-Ax_0\ ,\ s_0=r_0$$

برای $k\geq 0$ تعریف می‌کنیم

$$\alpha_k=\frac{\| r_k\|^2}{\left(As_k,s_k\right)},\ x_{k+1}=x_k+\alpha_k s_k$$

و

$$r_{k+1}=y-Ax_{k+1},\quad s_{k+1}=r_{k+1}+\beta_k s_k$$

که

$$\beta_k=\frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2}$$

هر گاه $\lim\limits_{k\to\infty} r_k=0$ در آن صورت $x_k=x^*$.

٤ مثال‌ها و نتایج عددی

در این قسمت با ارایه یک مثال به حل معادلات انتگرال توسط روش‌های گفته شده خواهیم پرداخت. سپس مقایسه این روش‌ها را ارایه می‌دهیم و در مورد نقاط ضعف و قوت هر کدام بحث خواهد شد.

٤-١ مثال

در این‌جا با در نظر گرفتن معادله انتگرال زیر و حل آن توسط روش‌های گفته شده کارایی روش گرادیان مزدوج را نشان خواهیم داد. بدین منظور ابتدا معادله داده شده را توسط روش کالوکیشن و گلرکین و در نهایت توسط روش گرادیان مزدوج حل خواهیم کرد.

$$x(t)=t+\int_{-1}^{1} stx(s)ds \qquad (E.1)$$

٤-١-١- روش کالوکیشن

با انتخاب توابع مستقل خطی $\varphi_3(t)=t^2$ ،$\varphi_2(t)=t$ ، $\varphi_1(t)=1$ ، جواب تقریبی از (٣) به صورت زیر می‌باشد.

$$x_3(t)=\sum_{j=1}^{3} c_j\varphi_j(t)=c_1+c_2t+c_3t^2 \qquad (E.2)$$

با جای‌گذاری $(E.2)$ در $(E.1)$ خواهیم داشت:

$$x_3(t)=c_1+c_2t+c_3t^2=t+\int_{-1}^{1} st(c_1+c_2s+c_3s^2)ds$$

و از آن جا

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = t(1 + \frac{2}{3} C_2) \qquad (E.3)$$

و لذا با انتخاب $t_1 = 1$ ، $t_2 = 0$ ، $t_3 = -1$ دستگاه زیر حاصل می‌گردد.

$$c_1 + \frac{1}{3} c_2 + c_3 = 1$$

$$c_1 = 0$$

$$c_1 - \frac{1}{3} c_2 + c_3 = -1$$

و از حل دستگاه فوق $c_1 = c_3 = 0$ و $c_2 = 3$ خواهد شد. بنابراین $x_3(t) = 3t$ که برابر جواب واقعی $x(t) = 3t$ می‌باشد.

۴-۱-۲ روش گلرکین

$\varphi_1(t) = 1$ ، $\varphi_2(t) = t$ ، $\varphi_3(t) = t^2$ را برای تقریب جواب $x(t)$ انتخاب می‌کنیم. با استفاده از (۳)،

$$x_3(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2. \qquad (E.4)$$

با جایگذاری $(E.4)$ در $(E.1)$ و با استفاده از رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} 1\,[c_1 + c_2 t + c_3 t^2 - \int_{-1}^{1} st(c_1 + c_2 s + c_3 s^2)ds]\,dt = \int_{-1}^{1} 1t\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} t\,[c_1 + c_2 t + c_3 t^2 - \int_{-1}^{1} st(c_1 + c_2 s + c_3 s^2)ds]\,dt = \int_{-1}^{1} t(t)dt$$

$$\int_{-1}^{1} t^2\,[c_1 + c_2 t + c_3 t^2 - \int_{-1}^{1} st(c_1 + c_2 s + c_3 s^2)ds]\,dt = \int_{-1}^{1} t^2(t)dt$$

لذا با حل این دستگاه ضرایب عبارتند از: $c_1 = c_3 = 0$ ، $c_2 = 3$. با استفاده از ضرایب، جواب تقریبی عبارتست از $x_3(t) = 3t$ ، که برابر جواب واقعی $x(t) = 3t$ می‌باشد.

۴-۱-۳- روش گرادیان مزدوج

روش گرادیان مزدوج را برای حل معادله انتگرال $(E.1)$ به کار می‌بریم.

$$x(t) = t + \int_{-1}^{1} stx(s)ds$$

حل: با حدس اولیه $x_0(t) = 0$ آغاز می‌کنیم، لذا $r_0 = y - Ax_0 = t$
قرار می‌دهیم $s_0 = r_0 = t$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 s_0 = \alpha_0 t \ , \quad \alpha_0 \frac{\|r_0\|^2}{(As_0, s_0)}$$

$$\|r_0\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$As_0 = (I - K)s_0 = s_0 - ks_0 = t - \int_{-1}^{1} ts^2 ds = t - \frac{2}{3}t = \frac{t}{3}$$

$$(As_0, s_0) = \int_{-1}^{1} (t/3)(t)dt = \frac{2}{9} \ \Rightarrow \ \alpha_0 = \frac{2/3}{2/9} = 3$$

و لذا $x_1 = 3t$، که برابر با جواب واقعی است. با ادامه روند الگوریتم داریم:

$$\begin{aligned} r_1 &= y - Ax_1 \\ &= t - (I-K)x_1 = t - x_1 + \int_{-1}^{1} stx_1 ds \\ &= t - 3t + 3\int_{-1}^{1} s^2 t ds = -2t + 2t = 0 \end{aligned}$$

$$r_1 = 0 \Rightarrow x^* = x_1 = 3t$$

٤-٢ مقایسه روش‌ها

در این جا به مقایسه روش‌های تصویری کالوکیشن و گلرکین با روش گرادیان مزدوج خواهیم پرداخت. ابتدا روش کالوکیشن را در نظر می‌گیریم. در این روش به دو نکته اساسی باید توجه نمود:
اول آن که بایـد اطلاع دقیقی از مقادیر تابع مجهول در گروه‌های مشخصی داشته باشیم و ثانیاً باید پایه‌های مناسبی برای بسط جواب در نظر گرفت. اگر شرط اول برقرار نباشد یا در دسترس نباشد نمی‌توانیم از این روش استفاده کنیم و این یکی از نقاط ضعف روش کالوکیشن است. محاسبات این روش از روش گلرکین کمتر است و از روش گرادیان مزدوج بیشتر است.
حال به روش گلرکین می‌پردازیم. در این روش نیز مانند روش کالوکیشن به انتخاب پایه‌های مناسب نیازمندیم ولی به اطلاعات در مورد تابع مجهول در گره‌ها نیاز نداریم. در حالتی که هسته متقارن باشد عملیات آن نصف می‌شود، زیرا ماتریس ضرایب متقارن حاصل خواهد شد. هم روش کالوکیشن و هم روش گرادیان دارای این نقطه قوت هستند که برای هسته‌های هموار و نه لزوماً متقارن قابل اجرا می‌باشند. حال به روش ارایه شده یعنی روش گرادیان مزدوج می‌پردازیم. این روش نیاز به انتخاب پایه ندارد و فقط برای هسته‌ای متقارن به کار می‌رود. داشتن حدس اولیه مناسب برای این روش تکراری بسیار مهم است و سادگی و کارایی آن در این حالت خاص مزیت عمده این روش محسوب می‌شود. به طور کلی هر سه روش با استفاده از روش‌های بهینه سازی به

جستجوی جواب می‌پردازند، با این تفاوت که در روش‌های تصویری کمینه ساختن عملگر باقیمانده مد نظر است در حالی که روش گرادیان مزدوج یک روش تکراری بوده و تکرارها مورد توجه قرار می‌گیرد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با استفاده از روش گرادیان مزدوج ارایه گردید. همچنین این روش با روش‌های کلاسیک و معروفی مانند گلرکین و کالوکیشن مقایسه شد. همان طور که در مثال دیدیم این روش در عمل نیز قابل اجرا بوده و می‌تواند جایگزین خوبی برای روش‌های تصویری در حالت خاص باشد از جمله مزیت‌های عمده این روش عدم نیاز به انتخاب پایه است، که یکی از مهمترین عوامل در روش‌های تصویری است.

منابع

[1] Fletcher, R., (1991). Practical methods of optimization, John Wiley.
[2] Atkinson, K., (1997). The numerical solution of integral equations of the second kind. Cambridge university press.
[3] Kythe, P. K., Puri, P., (2002) Computational methods for linear integral equations, Birkhauser.
[4] Golberg, M. A., (1990). Numerical solution of integral equations, Plenum press.
[5] Luenberger, D. G., (1989). Linear and nonlinear programming, Addison Wesley.
[6] Ma, W. Y., Zhang, Y., (2007). Apply CCGM-FFT method to study multiple- scattering in near-field optics, Guangdianzi. Jiguang. Journal of optoelectronics laser, 1500-1503.
[7] Zhuang, W. F., (2009). Adaptive integral method combined with the loose GMRES algorithm for planal structures analysis, International Journal of RF and microware computer, aided engineering, 19(1), 24-32.